

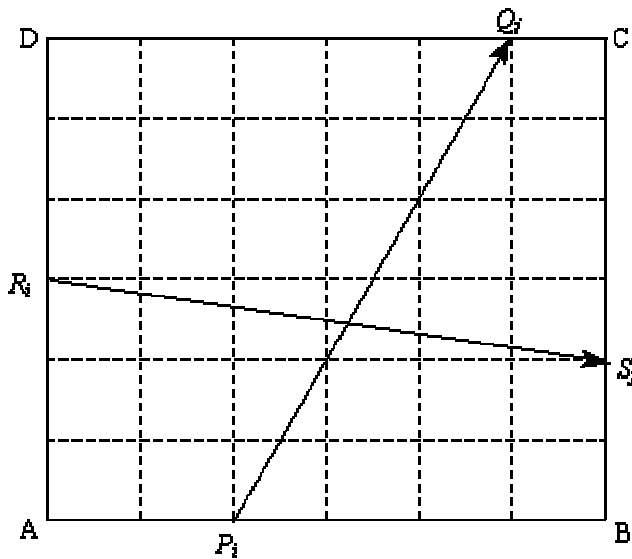
## 2000 年全国大学生数学建模竞赛

### D 题 空洞探测

山体、隧洞、坝体等的某些内部结构可用弹性波测量来确定。一个简化问题可描述为，一块均匀介质构成的矩形平板内有一些充满空气的空洞，在平板的两个邻边分别等距地设置若干波源，在它们的对边对等地安放同样多的接收器，记录弹性波由每个波源到达对边上每个接收器的时间，根据弹性波在介质中和在空气中不同的传播速度，来确定板内空洞的位置。现考察如下的具体问题：

一块 240 (米) × 240 (米) 的平板 (如图)，在 AB 边等距地设置 7 个波源  $P_i$  ( $i=1, \dots, 7$ )，CD 边对等地安放 7 个接收器  $Q_j$  ( $j=1, \dots, 7$ )，记录由  $P_i$  发出的弹性波到达  $Q_j$  的时间  $t_{ij}$ (秒)；在 AD 边等距地设置 7 个波源  $R_i$  ( $i=1, \dots, 7$ )，BC 边对等地安放 7 个接收器  $S_j$  ( $j=1, \dots, 7$ )，记录由  $R_i$  发出的弹性波到达  $S_j$  的时间  $\tau_{ij}$  (秒)。已知弹性波在介质和空气中的传播速度分别为 2880 (米/秒) 和 320 (米/秒)，且弹性波沿板边缘的传播速度与在介质中的传播速度相同。

- 1) 确定该平板内空洞的位置。



- 2) 只根据由  $P_i$  发出的弹性波到达  $Q_j$  的时间  $t_{ij}(i,j=1, \dots, 7)$ ，能确定空洞的位置吗？讨论在同样能够确定空洞位置的前提下，减少波源和接受器的方法。

$t_{ij}$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$Q_5$	$Q_6$	$Q_7$
$P_1$	0.0611	0.0895	0.1996	0.2032	0.4181	0.4923	0.5646
$P_2$	0.0989	0.0592	0.4413	0.4318	0.4770	0.5242	0.3805
$P_3$	0.3052	0.4131	0.0598	0.4153	0.4156	0.3563	0.1919
$P_4$	0.3221	0.4453	0.4040	0.0738	0.1789	0.0740	0.2122
$P_5$	0.3490	0.4529	0.2263	0.1917	0.0839	0.1768	0.1810
$P_6$	0.3807	0.3177	0.2364	0.3064	0.2217	0.0939	0.1031
$P_7$	0.4311	0.3397	0.3566	0.1954	0.0760	0.0688	0.1042

---

$\tau_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$
$R_1$	0.0645	0.0602	0.0813	0.3516	0.3867	0.4314	0.5721
$R_2$	0.0753	0.0700	0.2852	0.4341	0.3491	0.4800	0.4980
$R_3$	0.3456	0.3205	0.0974	0.4093	0.4240	0.4540	0.3112
$R_4$	0.3655	0.3289	0.4247	0.1007	0.3249	0.2134	0.1017
$R_5$	0.3165	0.2409	0.3214	0.3256	0.0904	0.1874	0.2130
$R_6$	0.2749	0.3891	0.5895	0.3016	0.2058	0.0841	0.0706
$R_7$	0.4434	0.4919	0.3904	0.0786	0.0709	0.0914	0.0583